CONCEPTOS BASICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Las palabras *ecuaciones* y *diferenciales* nos hacen pensar en la solución de cierto tipo de ecuación que contenga derivadas. Así como al estudiar álgebra y trigonometría se invierte bastante tiempo en resolver ecuaciones, como $x^2 + 5x + 4 = 0$ con la variable x, en este curso vamos a resolver ecuaciones diferenciales como y” + **2y’** + y = 0, para conocer la *función* y. Pero antes de comenzar cualquier cosa, se debe aprender algo de las definiciones y terminología básicas en este tema.

En cálculo aprendimos que la derivada, ${dy}/{dx}$ de la función $y = \phi(x)$ es en sí, otra función de x que se determina siguiendo las reglas adecuadas; por ejemplo, si $y = e^x$, entonces ${dy}/{dx} = 2xe^x$. Al reemplazar e^x, por el símbolo y se obtiene

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 2xy} \qquad \text{(ecuación 1)}$$

El problema al que nos encararemos en este curso no es “dada una función $y = \phi(x)$, determinar su derivada”. El problema es “dada una ecuación diferencial, como la ecuación 1, ¿hay algún método por el cual podamos llegar a la función desconocida $y = \phi(x)$?”

Definición de ecuación diferencial

> Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene una variable desconocida y sus derivadas.

Ejemplos:

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Recuerde que una ecuación es una igualdad

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{1°\ termino} + \underbrace{5x}_{2°\ termino} + \underbrace{4}_{3°\ termino}}_{Miembro\ izquierdo} = \underbrace{0}_{Mienbro\ derecho}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SEGÚN EL TIPO.

Una **ecuación diferencial ordinaria** es aquella que la variable desconocida depende solamente de una variable independiente.

Ejemplos:

$$y' = -ky$$

$$y'' + xy' + x^2y = x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = cosx$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

Importante recordar que en la ecuación

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E\omega cos\omega t$$

i =es la variable dependiente

t =es la variable independiente

L, R, C, E y ω= son llamados parámetros o constantes

Una **ecuación diferencial parcial** es que la que la variable desconocida depende de dos o más variables independientes.

Ejemplos:

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SEGÚN EL ORDEN.

El **orden de una ecuación diferencial** ordinaria o parcial es el de la derivada de mayor orden en la ecuación.

Ejemplo:

$y'' + xy' = senx$ (es una ecuación diferencial de orden 2)

$y^{(4)} - y^{(3)} = y'y + 2x^5$ (es una ecuación diferencial de orden 4)

$y' = -ky$ (es una ecuación diferencial de orden 1)

$y''' + xy' + x^2y = x + 1$ (es una ecuación diferencial de orden 3)

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SEGÚN LA LINEALIDAD O NO LINEALIDAD.

Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^n = f(x, y, y', y'', \ldots . y^{n-1})$ **es lineal** cuando f es una función lineal de y, $y', y'', \ldots . y^{n-1}$. Esto significa que una ecuación es lineal si se puede escribir en la forma

$$g(x) = y + y' + \cdots + y^{n-1} + y^n$$

En esta última ecuación, vemos las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

i) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.

ii) Cada coeficiente sólo depende de x, que es la variable independiente.

Ejemplo:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 4x^3$$

Una ecuación diferencial se dice que no es lineal si falta alguna de las derivadas entre y y la derivada de mayor orden, por ejemplo suponga que se tiene una ecuación de tercer orden, porque la derivada mayor es la tercera (y''') pero no aparece la primera derivada (y'), como sigue:

$g(x) = y + y'' + y'''$ (ecuación diferencial no lineal porque falta y')

Practica: En el siguiente cuadro marque con una equis las propiedades que se indican al lado derecho, es decir si es ordinaria, parcial, lineal, no lineal, orden y las variables dependientes e independientes.

Ecuación diferencial	Ordinaria	Parcial	lineal	No lineal	Orden	Variable independiente	Variable dependiente
1) $y' = y - x^2$							
2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$							
3) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^4 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^8 = x$							
4) $\frac{d\phi}{d\theta} = \phi - \theta$							
5) $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y}$							
6) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$							
7) $x^3y''' + x^2y'' + xy' + y = lnx$							
8) $y'' = sen(xy')$							
9) $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 = 0$							
10) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$							

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una solución para una ecuación diferencial en la variable desconocida *y* y la variable independiente *x* en el intervalo *G* es una función *y(x)* que satisface la ecuación diferencial para todos los valores de *x* en *G*.

Ejemplo: Verifique que la función $f(x) = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' - 3y' + 2y = 0$

Solución: Observe que la ecuación diferencial involucra a la primera y tercera derivada de $f(x)$

$f'(x) = (-2x)'e^{-2x} = -2e^{-2x}$

$f''(x) = -2 \cdot (-2x)'e^{-2x} = -2 \cdot -2e^{-2x} = 4e^{-2x}$

$f'''(x) = 4 \cdot (-2x)'e^{-2x} = 4 \cdot -2e^{-2x} = -8e^{-2x}$

> Recuerde que si $\left(e^{g(x)}\right)' = \left(g(x)\right)'e^{g(x)}$
>
> y $(\ln g(x))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

Una vez obtenidas estas derivadas se sustituyen en la ecuación diferencial.

$\Rightarrow y''' - 3y' + 2y = 0$

$\Rightarrow -8e^{-2x} - 3(-2e^{-2x}) + 2(e^{-2x}) = 0$

$\Rightarrow -8e^{-2x} + 6e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$

$\Rightarrow -8e^{-2x} + 8e^{-2x} = 0$

$\Rightarrow 0 = 0$

> Recuerde que
>
> $(senu)' = cosu \cdot u'$ $\quad$ $(\text{cosecu})' = -\text{cosecu} \cdot \text{cotgu} \cdot \text{u}'$
>
> $(cosu)' = -senu \cdot u'$ $\quad$ $(\text{secu})' = \text{secu} \cdot \text{tanu} \cdot \text{u}'$
>
> $(tanu)' = (sec^2u) \cdot u'$ $\quad$ $(\text{cotgu})' = -cosec^2u \cdot u'$

De esta forma se verifica que una función es solución de una ecuación diferencial.

Practica:

1. Verifique que la función $f(x) = e^{-3x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' + 2y'' - 3y' = 0$.
2. Verifique que la función $f(x) = 3e^{-2x} + 4e^{x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' - 3y' + 2y = 0$.
3. Verifique que la función $f(x) = x^3 - 6x - 5$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y + y = x^3 - 3x^2 + 1$
4. Verifique que la función $f(x) = senx$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.
5. Verifique que la función $u = xtanx$ es una solución de la ecuación diferencial $xu' = u + x^2 + u^2$.

Algunas ecuaciones diferenciales no tendrán solución ($(y')^4 + y^2 = -1$), otras solo tendrán una solución ($(y')^4 + y^2 = 0$) y otras presentaran infinitas soluciones ($y(x) = c_1sen2x + c_2cos2x$).

SOLUCIONES GENERALES Y PARTICULARES

Una **solución general** de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las soluciones, esta puede contener n cantidad de constantes.

Ejemplo: Sea la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.

Una solución general de dicha ecuación es $y = c_1 sen2x + c_2 cos2x$

Ejemplo: Determine una solución general para la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = 12x^2$

Solución: Para encontrar la solución general vamos a integrar

$$\Rightarrow \int y'' = \int 12x^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{12x^3}{3} + C_1 = 4x^3 + C_1$$

Se vuelve integrar

$$\Rightarrow \int y' = \int 4x^3 + C_1$$

$$\Rightarrow y = \frac{4x^4}{4} + C_1 x + C_2$$

Recuerde que:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|u| + C$$

Una **solución particular** de una ecuación diferencial es una ecuación cualquiera que cumpla con la igualdad.

La solución particular se puede obtener a partir de la solución general, sustituyendo las constantes por valores específicos, de acuerdo a ciertas condiciones dadas.

Ejemplo: Sea la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.

Son soluciones particulares de dicha ecuación $y = 5sen2x - 3cos2x$, otra solución particular seria $y = sen2x$.

Queda como ejercicio verificar que estas soluciones particulares cumple la ecuación diferencial.

Ejemplo: Sabiendo que la ecuación diferencial $y'' = 12x^2$ tiene como solución general $y = \frac{4x^4}{4} + C_1 x + C_2$ determine una solución particular cuando $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$

Solución: Observe que en la primera derivada cuando $x = 0$ y $y' = 2$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 + C_1$$

$$\Rightarrow 2 = 4(0)^3 + C_1$$

$$\Rightarrow 2 = +C_1$$

La otra condición nos dice que si $x = 0$ y $y = 1$

$\Rightarrow y = x^4 + C_1x + C_2$

$\Rightarrow 1 = (0)^4 + 2 \cdot (0) + C_2$

$\Rightarrow 1 = C_2$

Ahora la solución particular sería.

$y = x^4 + 2x + 1$

La solución general de una ecuación diferencial no siempre puede expresarse como fórmula única.x

Por ejemplo la ecuación diferencial $y' + y^2 = 0$ que tiene dos soluciones particulares $y = \frac{1}{x}$ y $y = 0$.

Las ecuaciones diferenciales lineales son especiales a este respecto.

Las soluciones de una ecuación diferencial que no se obtienen de la solución general, se les conoce como **soluciones singulares**.

Practica:

1. Sabiendo que la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ tiene como solución general $y = C_1sen2x + C_2cos2x$ determine una solución particular cuando $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN VARIABLES SEPARABLES.

Esta es una técnica que se utiliza para resolver tipos específicos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Suponga que $M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$ es una ecuación ordinaria de primer orden, siendo M una función continua de x solamente y N una función continua de y solamente. Para este tipo de ecuación, todos los términos en x pueden juntarse a dx y todos los términos en y a dy, pudiendo obtenerse una solución por integración. De tales ecuaciones se dice que son separables, y el método de solución se llama separación de variables. Los pasos son los siguientes:

1. Expresar la ecuación en forma diferencial

$$\Rightarrow M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow M(x) = -N(y)\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow M(x)dx = -N(y)dy$$

2. Integrar para obtener la solución general

$\Rightarrow \int M(x)dx = -\int N(y)dy$

Ejemplo: Hallar la solución general de $(x^2+4)\frac{dy}{dx} = xy$

Solución:

$(x^2+4)dy = xydx$

$\frac{dy}{y} = \frac{xy}{(x^2+4)}dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{(x^2+4)}dx$

Sea $u = x^2+4 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2u}du$

$ln|y| = \frac{1}{2}ln(x^2+4) + C_1$

$ln|y| = ln\sqrt{x^2+4} + C_1$

$e^{ln|y|} = e^{ln\sqrt{x^2+4}+C_1}$

$y = e^{C_1} \cdot \sqrt{x^2+4}$

$y = C \cdot \sqrt{x^2+4}$

<u>ECUACIONES HOMOGÉNEAS Y REDUCIBLES A HOMOGÉNEAS.</u>

<u>REDUCCIÓN DE ORDEN EN ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON UNA VARIABLE AUSENTE.</u>

<u>ECUACIONES EXACTAS Y REDUCIBLES A EXACTAS POR MEDIO DE UN FACTOR INTEGRANTE.</u>

<u>ECUACIONES LINEALES Y REDUCIBLES A ELLAS. (ECUACIÓN DE BERNOULLI.)</u>

<u>ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UNA FAMILIA PARAMÉTRICA DE CURVAS PLANAS.</u>

<u>TRAYECTORIAS ORTOGONALES EN COORDENADAS RECTANGULARES.</u>